

## 論文の内容の要旨

題名： Analysis of error constants for linear conforming  
and nonconforming finite elements

適合および非適合 1 次有限要素の誤差定数の解析

氏名： 劉 雪峰 (Liu Xuefeng)

有限要素法の誤差評価には、様々な誤差定数が現れる。その具体的な値は決定しにくい事もあり、存在のみが論じられることが多かったが、精度保証、事後誤差評価、適応型計算など定量的な誤差評価の重要性が増してきた結果、より具体的な値が必要になっている。本解析では、適合および非適合 1 次三角形有限要素法で現れる誤差定数を解析して、有限要素解の定量的な事前誤差評価と事後誤差評価を得た。研究内容を下記の三つの部分として説明する。

[1] 適合および非適合有限要素法において、三角形要素での補間関数の誤差評価に現れる様々な誤差定数を系統的に研究して、各誤差定数の形状依存性について考察した。特に、一部の誤差定数の具体的な値もしくは上界と下界を明らかにした。従って、任意の三角形に対する補間関数については具体的な誤差評価ができるようになった。これらの結果は以下のようにまとめられる。

三角形  $T_{\alpha,\theta,h}$  において、補間作用素  $\Pi_{\alpha,\theta,h}^0$ 、 $\Pi_{\alpha,\theta,h}^1$ 、 $\Pi_{\alpha,\theta,h}^{1,n}$ 、 $\Pi_{\alpha,\theta,h}^F$  (それぞれ論文中で定義される) は以下の補間関数誤差評価がある。

$\Pi_{\alpha,\theta,h}^0$  : For  $v \in H^1(T_{\alpha,\theta,h})$

$$\|v - \Pi_{\alpha,\theta,h}^0 v\| \leq 1/\pi \phi_0(\theta) h |v|_1$$

$\Pi_{\alpha,\theta,h}^1$  : For  $u \in H^2(T_{\alpha,\theta,h})$

$$|u - \Pi_{\alpha,\theta,h}^1 u|_1 \leq 1/2 \phi_4(\theta) h |u|_2$$

$$\|u - \Pi_{\alpha,\theta,h}^1 u\| \leq 0.36 \phi_5(\theta) h^2 |u|_2$$

$\Pi_{\alpha,\theta,h}^{1,n}$  : For  $u \in H^2(T_{\alpha,\theta,h})$

$$\|u - \Pi_{\alpha,\theta,h}^{1,n} u\| \leq 1/(4\pi) \phi_0(\theta) h^2 |u|_2$$

$$\|\nabla u - \nabla_h \Pi_{\alpha,\theta,h}^{1,n} u\| \leq 1/\pi \phi_0(\theta) h |u|_2$$

$\Pi_{\alpha,\theta,h}^F$  : For  $q \in H(\text{div}; T_{\alpha,\theta,h})$

$$\|q - \Pi_{\alpha,\theta,h}^F q\| \leq C_{F,1}(\alpha, \theta) h \|\text{div } q\| + C_{F,2}(\alpha, \theta) h |q|_1$$

ただし、 $\phi_i(\theta)$  ( $i = 0, 4, 5$ )、 $C_{F,i}$  ( $i = 1, 2$ ) は具体的で簡単な関数として、論文中で定義される。

以上の補間誤差の定量的な評価によって、有限要素解の事前評価を具体的に計算できるようになった。

誤差定数の幾何パラメータの依存性の解析に現れる  $C_i(\alpha, \theta)$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 5, \{4, n\}, \{5, n\}$ ) はパラメータ  $\alpha, \theta$  について、一様有界であることが分かる。しかし、誤差定数  $C_4(\alpha, \theta)$  と  $C_{F,2}(\alpha, \theta)$  については、三角形の最大内角  $\theta$  が  $\pi$  に近づくととき、発散する。したがって、適合有限要素法と非適合有限要素法について、“最大内角条件”が必要であることが分かる。

[2] 誤差定数を具体的に評価するために、1次適合有限要素法を用いて、ラプラス作用素に関連するいくつかの誤差定数の事後評価方法を構築した。この方法は作用素の固有値理論に基づいており、一般的な形状の三角形に対応するいくつかの誤差定数の具体的な上

下評価ができるようになる。さらに三角形の領域に限らず、一般的な凸多角形領域について、ラプラス作用素の最小固有値の評価が可能になる。例として、円領域でのラプラス作用素の最小固有値の評価を行った。

[3] 有限要素解の事後誤差評価について、適合有限要素解と非適合有限要素解を組み合わせ、Hypocircle 法の原理を用いて、Poisson 方程式の境界値問題の定量的な事後誤差評価を得た。特に、この方法は方程式の解の二階微分の評価は直接には用いないので、非凸な領域での特異問題にも応用ができる。数値例として、L型領域で有限要素解の誤差評価を検証した。将来的には、精度保証付き計算を使うと、有限要素解の誤差の厳密な評価が可能と考えられ、これは理論的な証明に対して重要な意味がある。