

劉 雪峰 (LIU Xuefeng)

A. 研究概要

適合および非適合 1 次三角形有限要素法に現れる誤差定数を解析し、有限要素解の定量的な事前誤差評価と事後誤差評価を得た。研究内容を、下記の 3 項目にまとめておく。

[1] 適合および非適合有限要素法において、三角形要素での補間関数の誤差評価に現れる様々な誤差定数を系統的に研究して、各誤差定数の形状依存性について考察した。特に、一部の誤差定数の具体的な値もしくは上界と下界を明らかにした。従って、任意の三角形に対する補間関数については定量的な誤差評価ができ、その結果、有限要素解の事前評価を具体的に計算できるようになった。特に、適合有限要素法と非適合有限要素法について、“最大内角条件”が必要であることが分かる。

[2] 誤差定数を具体的に評価するために、1 次適合有限要素法を用いて、ラプラス作用素に関連するいくつかの誤差定数の事後評価方法を構築した。この方法は作用素の固有値の近似理論に基づいており、一般的な形状の三角形に対応するいくつかの誤差定数の具体的な上下界評価ができるようになる。さらに三角形の領域に限らず、一般的な凸多角形領域について、ラプラス作用素の最小固有値の評価が可能になる。例として、正多角形領域と円領域でのディリクレ境界条件下のラプラス作用素の最小固有値の評価を行った。

[3] 有限要素解の事後誤差評価について、適合有限要素解と非適合有限要素解を組み合わせ、Hypersphere 法の原理を用いて、Poisson 方程式の境界値問題の定量的な事後誤差評価を得た。特に、この方法は方程式の解の二階微分の評価は直接には用いないので、非凸な領域での特異問題にも応用ができる。数値例として、L 型領域での有限要素解の誤差評価を検証した。将来的には、精度保証付き計算を使うと、有限要素解の誤差の厳密な評価が可能と考えられ、これは理論的な証明に対して重要な意味がある。

For the well known linear conforming and non-conforming triangular FEMs, I have studied the corresponding interpolation errors to give quantitative a priori and a posteriori error estimates for the finite element solutions. The

research results are summarized in three parts.

1) I have given systematic analysis for the error constants appearing in the interpolation error estimation. For each constant, I have studied its dependency on the geometry of the element and tried to determine its concrete or give suitable upper bounds in special cases. Thus the quantitative but rough interpolation error estimation becomes available for arbitrary elements. Particularly, the role of the “maximum angle condition” for the triangulations has become clear in both conforming FEM and non-conforming one.

2) To evaluate the constants on arbitrary triangular element, we developed an a posteriori estimation method to give computable lower and upper bounds for such constants. The employed method is based on the approximation theory of the eigenvalue problems for Laplacian. Not limited to triangular domains, the developed method can be also used to estimate the minimum eigenvalue of minus Laplacian on general domains. As an example, convex polygonal domains are dealt with to show the validity of the method.

3) I developed hypersphere-based a posteriori error estimation for the Poisson equation, which used both the conforming P_1 FE solution and the nonconforming one. As the method does not need the information on the second order derivatives of the solution, we can apply it to give a posteriori error estimates for the Poisson problem over non-convex domain, which may have singular solution around reentrant corner. In the future, it is expected to adopt the verified computation method to make the error estimates strictly correct. Once such a method is established, it will provide us with a powerful tool for mathematical proof.

B. 発表論文

1. Xuefeng LIU: “適合および非適合 1 次有限要素の誤差定数の解析 (Analysis of error constants for linear conforming and nonconforming finite elements)”, 東京大学博士論文 (2009)

2. Xuefeng LIU and Fumio Kikuchi: “Analysis and estimation of error constants for P_0 and P_1 interpolations over triangular finite elements”, Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, (2008) 2008-20.
3. Fumio KIKUCHI and Xuefeng LIU: “Estimation of interpolation error constants for the P_0 and P_1 triangular finite elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.196, Issues 37-40, (2007), pp. 3750-3758.
4. Fumio KIKUCHI and Xuefeng LIU: “Determination of the Babuska-Aziz constant for the linear triangular finite element”, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (JJIAM), Vol.23, No.1, (2006), pp. 75-82.
5. Xuefeng LIU: “0次および1次三角形有限要素の補間誤差定数の評価 (Estimation of error constants for P_0 and P_1 interpolations over triangular finite elements)”, 東京大学数理科学研究科修士論文 (2005).

C. 口頭発表

1. Estimation of error constants appearing in FEM, Seminar on “Accuracy and quality of numerical methods”, Tokyo University, June 9th, 2008.
2. 非適合三角形1次有限要素法の解析と適用, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2007年12月18日.
3. Estimation of Error Constants Appearing in Non-conforming Linear Triangular Finite Element, APCOM'07-EPMESC XI, Kyoto, December 3rd, 2007.
4. 非適合三角形1次有限要素に現れる誤差定数, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2006年12月20日.
5. 0次および1次三角形有限要素の補間誤差定数の評価, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2005年12月20日.